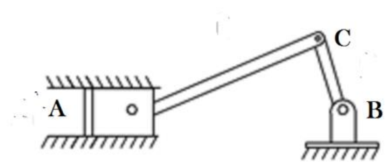
XVI. MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Cualquier movimiento plano que no sea una traslación pura o una rotación pura se conoce como movimiento plano general, y se puede considerar como la realización simultánea de una traslación y una rotación. Como ejemplo, consideremos el pistón del motor de una motocicleta.

Consta de un émbolo *A*, de una manivela o cigüeñal *B*, y una biela, *C*, que los une. En este mecanismo —suponiendo estacionada la motocicleta, pero con el motor en marcha— el émbolo se mueve con traslación pura, la manivela con rotación pura, y la biela tiene un movimiento plano general.



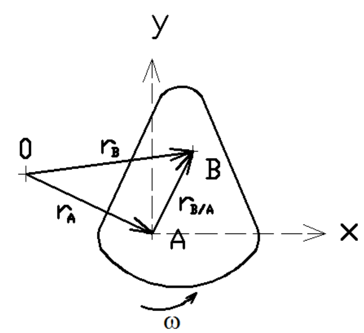
Otro ejemplo de movimiento plano general será el de cualquiera de las ruedas de la motocicleta, una vez que avance en línea recta. El estudio del movimiento de la biela puede abordarse a partir del conocimiento del movimiento de sus extremos; y el de la rueda, partiendo del movimiento de su centro de rotación y del punto en contacto con el pavimento: en general, conocido el movimiento de dos puntos del cuerpo, se puede establecer el de las demás partículas.

Cinemática. Velocidades

El menhir de la figura es un cuerpo rígido que se mueve con movimiento plano general. *A* y *B* son dos partículas cualesquiera del menhir, y

O es un punto fijo. Sea *A* el origen del sistema de referencia móvil, cuyos ejes mantienen fija su dirección durante el movimiento.

Recurriendo a las ecuaciones del movimiento relativo, observamos que la posición absoluta de *B* se obtiene sumando vectorialmente la posición relativa de *B* respecto a *A*, más la posición absoluta de *A*. Este punto se suele llamar *punto base* y puede ser cualquiera del cuerpo, aunque conviene que su movimiento se claramente conocido.



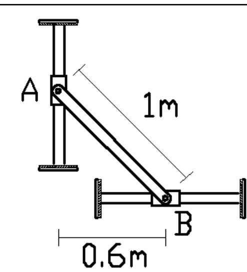
$$\bar{r}_B = \bar{r}_{B/A} + \bar{r}_A$$

El vector de posición relativa de *B* respecto a *A* tiene una magnitud fija, pues une dos partículas de un cuerpo rígido, pero cambia de dirección y tendrá la misma velocidad angular del menhir. Por tanto, al derivar la ecuación anterior con respecto al tiempo obtenemos

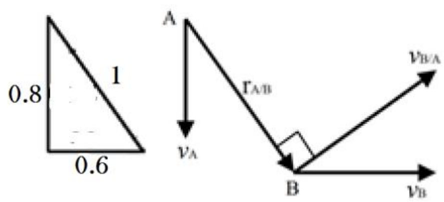
$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B/A} + \bar{v}_A$$

pero la velocidad relativa de *B* respecto de *A* es igual al producto de la velocidad angular por la distancia entre *A* y *B*, puesto que *B* describe aparentemente —estamos hablando de movimiento relativo— una circunferencia alrededor de *A*, de modo semejante a como el sol recorre una aparente órbita elíptica alrededor de la Tierra; o sea, $\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_A$. Y el vector velocidad relativa es perpendicular a la recta *AB* (Cfr. capítulo XII, sobre movimiento relativo).

Ejemplo. Una barra de 1 m de largo está unida en sus extremos a sendos colla-rines, como se muestra en la figura. En la posición mostrada, el collarín *A* descien-de con una rapidez de 2.4 m/s. Determine la velocidad angular de la barra y la velocidad lineal del collarín *B*.



Elegiremos un sistema de referencia y plantearemos la ecuación que dedujimos arriba, tomando el extremo *A* como punto base. Observamos que *B* está constreñido a moverse en dirección horizontal.



$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{v}_A$$

$$v_B\mathbf{i} = \omega\mathbf{k} \times (0.6\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j}) - 2.4\mathbf{j}$$

$$v_B\mathbf{i} = 0.8\omega\mathbf{i} + 0.6\omega\mathbf{j} - 2.4\mathbf{j}$$

$$v_B\mathbf{i} = 0.8\omega\mathbf{i} + (0.6\omega - 2.4)\mathbf{j}$$

Por igualdad de vectores

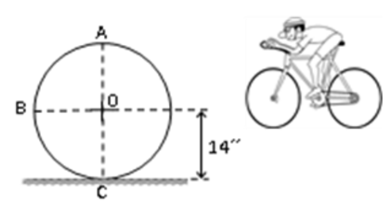
$$0 = 0.6\omega - 2.4$$

$$\boxed{\omega = 4 \text{ rad/s} \circlearrowleft}$$

$$v_B = 0.8(4)$$

$$\boxed{v_B = 3.2 \text{ m/s} \rightarrow}$$

Ejemplo. La figura representa la rueda delantera de una bicicleta que viaja hacia la izquierda con una velocidad constante de 7 ft/s. *a)* Calcule la velocidad angular de la rueda. *b)* Determine las velocidades de los puntos *O*, *A*, *B* y



La sola observación del problema nos lleva a deducir que la velocidad lineal de *O* es la misma que la del cuadro de la bicicleta, es decir,

$$\boxed{v_0 = 7 \text{ ft/s} \leftarrow}$$

Por tanto, la velocidad angular de la rueda, sabiendo que su radio es de 14/12 ft, es

$$v_0 = \omega r$$

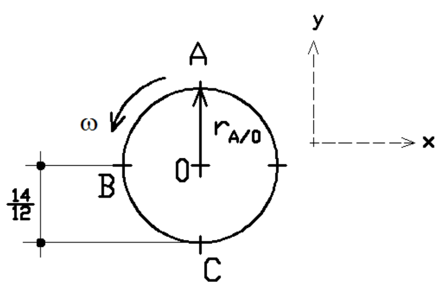
$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{7}{14}(12)$$

$$\boxed{\omega = 6 \text{ rad/s} \circlearrowleft}$$

lo cual se puede comprobar por el hecho de que a una vuelta de la rueda corresponde un avance de $2\pi r$ de la bicicleta:

$$\omega = \frac{v_0}{r}; \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{r\Delta t}; \quad \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

Las velocidades lineales de los otros puntos los calcularemos mediante la ecuación del movimiento relativo, eligiendo O como punto base.



$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{r}_{A/0} + v_0$$

$$\bar{v}_A = 6\mathbf{k} \times \frac{14}{12}\mathbf{j} - 7\mathbf{i}$$

$$\bar{v}_A = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{i} = -14\mathbf{i}$$

$$\boxed{v_A = 14\ \text{ft/s} \leftarrow}$$

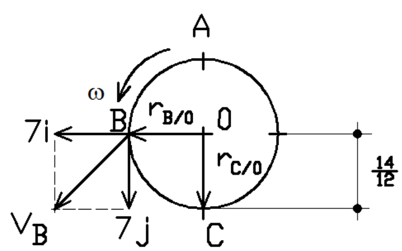
$$v_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/0} + \bar{v}_0$$

$$v_B = 6\mathbf{k} \times \left(-\frac{14}{12}\mathbf{i}\right) - 7\mathbf{i}$$

$$v_B = -7\mathbf{j} - 7\mathbf{i}$$

$$v_B = 7\sqrt{2}$$

$$\boxed{v_B = 9.9\ \text{ft}/\swarrow \quad 45°}$$



$$\bar{v}_c = \bar{v}_{C/0} + \bar{v}_0$$

$$\bar{v}_c = 6\mathbf{k} \times \left(-\frac{14}{12}\mathbf{j}\right) - 7\mathbf{i}$$

$$\bar{v}_c = 7\mathbf{i} - 7\mathbf{i}$$

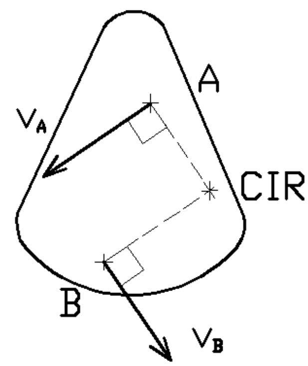
$$\boxed{v_c = 0}$$

Que la velocidad de C sea nula, se puede deducir fácilmente de hecho de que ese punto está en contacto con otro del suelo, y ambos deben tener la misma rapidez, ya que no se desliza la llanta sobre el suelo.

Centro instantáneo de rotación

Existe otra manera muy eficaz de relacionar la velocidad angular de un cuerpo rígido con las velocidades lineales de sus partículas, sabiendo que cualquier cuerpo que rota, lo hace alrededor de un centro de rotación (en realidad, de un eje que pasa por ese centro y que es perpendicular al plano del movimiento).

Para la rotación pura, el centro está fijo, pero en el movimiento plano general cambia de posición, y es el punto del cuerpo o de su prolongación cuya velocidad es nula en un instante dado.



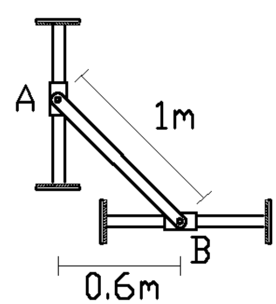
Para hallar el centro instantáneo de rotación de un cuerpo, basta trazar sendas perpendiculares a las velocidades de dos puntos cualesquiera: en su intersección se halla dicho centro instantáneo, o de velocidad nula.

Además, la velocidad angular del cuerpo será el cociente de la magnitud de cualquiera de esas velocidades entre su distancia al centro:

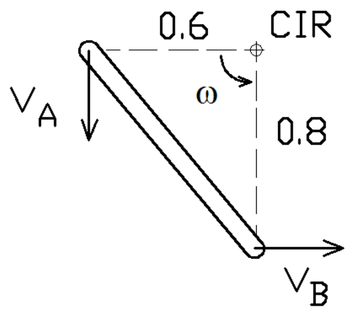
$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B}$$

Volveremos a resolver este problema, con el nuevo método.

Ejemplo. Una barra de 1 m de largo está unida en sus extremos a sendos colla-rines, como se muestra en la figura. En la posición mostrada, el collarín *A* desciende con una rapidez de 2.4 m/s. Determine la velocidad angular de la barra y la velocidad lineal del collarín *B*. Utilice el método del centro instantáneo de rotación.



Trazamos perpendiculares a las velocidades de *A* y *B*, y en la intersección está el centro instantáneo de rotación. Como la distancia del centro al extremo *A* es de 0.6 m, la velocidad angular de la escalera es



$$\omega = \frac{v_A}{r_A}$$

$$\omega = \frac{2.4}{0.6}$$

$$\boxed{\omega = 4 \text{ rad/s} \circlearrowleft}$$

Y la velocidad del extremo *B* resulta ser

$$v_B = \omega r_B$$

$$v_B = 4(0.8)$$

$$\boxed{v_B = 3.2 \text{ m/s} \rightarrow}$$

El lector puede darse cuenta de que el centro instantáneo de rotación de la rueda de bicicleta, que resolvimos como ejemplo, es precisamente el punto *C*, en contacto con el suelo.

Cinemática. Aceleraciones

Retomando la consideración de que un punto *B* cualquiera de un cuerpo rígido tiene un movimiento circular relativo a un centro *A*, resulta que la aceleración relativa de *B* respecto a *A* tiene dos componentes intrínsecas; la tangencial, cuya magnitud será igual al producto de la aceleración angular del cuerpo por la distancia $\overline{AB}$, y la normal, de módulo igual a la velocidad angular al cuadrado por dicha distancia $\overline{AB}$:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B/A} + \bar{a}_A$$

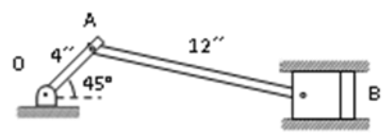
$$\bar{a}_B = \left(\bar{a}_{B/A}\right)_t + \left(\bar{a}_{B/A}\right)_n + \bar{a}_A$$

$$\bar{a}_B = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A}\right) + \bar{a}_A$$

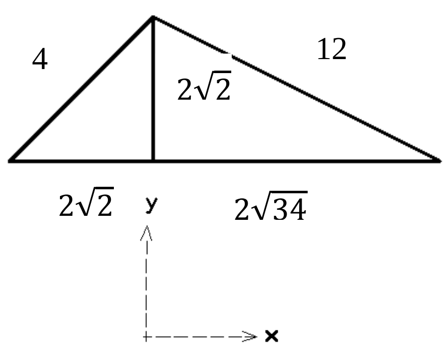
o mejor

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{B/A} - \omega^2 \bar{r}_{B/A} + \bar{a}_A}$$

Ejemplo. El cigüeñal *OA* gira con rapidez angular constante de 60 rpm en sentido antihorario. Determine, para la posición mostrada, *a)* la rapidez angular de la biela *AB* y la velocidad lineal del émbolo *B*; *b)* la aceleración angular de la biela y la aceleración lineal del émbolo.



Para contestar al inciso *a)* emplearemos la fórmula del movimiento relativo, después de estudiar la geometría de la configuración.



$$\omega_0 = 60\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} = 60\left(\frac{2\pi}{60}\right)\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2\pi$$

$$v_A = 2\pi(4) \measuredangle 45°$$

$$\bar{v}_A = -17.77\mathbf{i} + 17.77\mathbf{j}$$

Como

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{v}_A$$

Puesto que la velocidad del émbolo es horizontal

$$v_B\mathbf{i} = \omega\mathbf{k} \times \left(2\mathbf{i}\sqrt{34} - 2\mathbf{j}\sqrt{2}\right) + \bar{v}_A$$

$$v_B\mathbf{i} == 2\omega\mathbf{i}\sqrt{34} + 2\omega\mathbf{j}\sqrt{34} - 17.77\mathbf{i} + 17.77\mathbf{j}$$

Por tanto

$$0 = 2\omega\sqrt{34} + 17.77$$

$$\omega = -1.524$$

$$\boxed{\omega = 1.524\ \text{rad/s} \circlearrowright}$$

$$v_B = 2(-1.524)\sqrt{2} - 17.77 = -22.1$$

$$\boxed{v_B = 22.1\,\text{in/s} \leftarrow}$$

Aceleraciones

$$\bar{a}_A = (\bar{a}_A)_n = (2\pi)^2\mathbf{k} \times \left(2\mathbf{i}\sqrt{2} + 2\mathbf{j}\sqrt{2}\right)$$

$$\bar{a}_A = -111.7\mathbf{i} - 111.7\mathbf{j}$$

Como

$$\bar{a}_B = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{B/A} - \omega^2 \bar{r}_{B/A} + \bar{a}_A$$

$$a_B\mathbf{i} = \alpha\mathbf{k} \times \left(2\mathbf{i}\sqrt{34} - 2\mathbf{j}\sqrt{2}\right) - (1.524)^2\left(2\mathbf{i}\sqrt{34} - 2\mathbf{j}\sqrt{2}\right) - 111.7\mathbf{i} - 111.7\mathbf{j}$$

$$a_B\mathbf{i} = 2\alpha\mathbf{i}\sqrt{2} + 2\alpha\mathbf{j}\sqrt{34} - 27.1\mathbf{i} + 6.57\mathbf{j} - 111.7\mathbf{i} - 111.7\mathbf{j}$$

De donde

$$0 = 2\alpha\sqrt{34} + 6.57 - 111.7$$

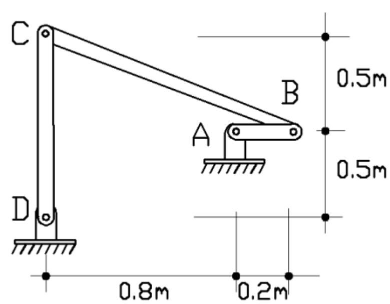
$$\boxed{\alpha = 9.01 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft}$$

$$a_B = 2(9{,}01)\sqrt{2} - 27.1 - 111.7 = -113.3$$

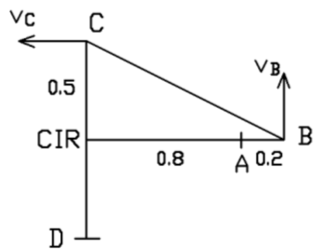
$$\boxed{a_B = 113.3 \ \text{in/s}^2 \leftarrow}$$

Los mecanismos de cuatro articulaciones son los más complicados que pueden resolverse con el procedimiento que estamos estudiando. En los problemas anteriores, los extremos de los cuerpos con movimiento plano general o se mueven ambos en línea recta, o uno en línea recta y otro en una curva. En los mecanismos de que hablamos, los dos extremos describen arcos de circunferencia. A continuación presentamos un caso.

Ejemplo. La barra *AB* del meca-nis-mo de cuatro articulaciones de la figu-ra, tiene, en el instante mostrado, una velocidad angular de 4 rad/s y una ace-leración angular de 20 rad/s^2, ambas en sentido contrario de las ma-necillas del reloj. Para el mismo ins-tante, calcule las aceleraciones angu-lares de las ba-rras *BC* y *CD*.



Las barras *AB* y *CD* rotan alrededor de puntos fijos. La barra BC está dotada de movimiento plano general. Para determinar su rapidez angular, emplearemos el método del centro instantáneo de rotación, que en este problema se puede hallar muy fácilmente, pues está en la intersección de la barra *CD* con la prolongación de la *AB*.



$$v_B = \omega_{AB} r_{AB} = 4(0.2) = 0.8$$
$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_B} = \frac{0.8}{1} = 0.8 \circlearrowleft$$
$$v_C = \omega_{BC} r_C = 0.8(0.5) = 0.4$$
$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{1} = 0.4 \circlearrowleft$$

Una vez determinadas las velocidades angulares de las barras, procedemos a investigar sus aceleraciones.

$$(a_B)_n = \omega_{AB}^2 r_{AB} = 4^2(0.2) = 3.2 \leftarrow$$
$$(a_B)_t = \alpha_{AB} r_{AB} = 20(0.2) = 4 \uparrow$$
$$(a_C)_n = \omega_{CD}^2 r_{CD} = 0.4^2(1) = 0.16 \downarrow$$
$$(a_C)_t = \alpha_{CD} r_{CD} = \alpha_{CD}(1) = \alpha_{CD} \leftarrow$$

Como

$$\bar{a}_C = \bar{\alpha}_{BC} \times \bar{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \bar{r}_{C/B} + \bar{a}_B$$
$$-\alpha_{CD}\mathbf{i} - 0.16\mathbf{j} = \alpha_{BC}\mathbf{k} \times (-\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) - 0.8^2(-\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) - 3.2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$
$$-\alpha_{CD}\mathbf{i} - 0.16\mathbf{j} = -0.5\alpha_{BC}\mathbf{i} - \alpha_{BC}\mathbf{j} + 0.64\mathbf{i} - 0.32\mathbf{j} - 3.2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

Igualando las componentes verticales

$$-0.16 = -\alpha_{BC} + 3.68$$
$$\boxed{\alpha_{BC} = 3.84 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft}$$

Igualando las horizontales

$$-\alpha_{CD} = -0.5(3.84) + 0.64 - 3.2$$
$$\alpha_{CD} = 1.92 - 0.64 + 3.2$$
$$\boxed{\alpha_{CD} = 4.48 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft}$$

Cinética

El movimiento plano general puede considerarse como una traslación y una rotación simultáneas; y la rotación, que se considera arbitrariamente alrededor de cualquier eje, puede elegirse baricéntrica.

El sistema resultante de cualquier sistema de fuerzas coplanares puede estar constituido por una fuerza o por un par. Si dicho sistema resultante es un par, el movimiento es una rotación pura baricéntrica. Cuando la resultante es una fuerza, pueden presentarse dos casos: que su línea de acción pase por el centro de masa del cuerpo, o que no pase por él. En el primer caso, el movimiento que se produce es una traslación pura; en el segundo, una rotación no baricéntrica, o un movimiento plano general. Recordemos que la rotación pura no baricéntrica es un caso particular del movimiento plano general.

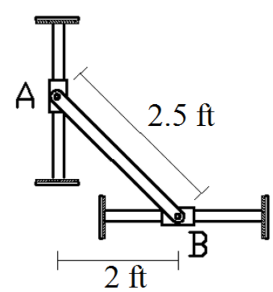
Recordemos también que una fuerza puede transportarse a otra posición sin alterar los efectos externos que produce, si se acompaña con un par de fuerzas, llamado par de transporte. Por tanto, la fuerza resultante se puede transportar al centro de masa de un cuerpo, acompañada de un par. Y, como vimos al finalizar el capítulo anterior, ese par es el que produciría una rotación baricéntrica y es igual al producto de la aceleración angular del cuerpo por el momento de inercia de su masa con respecto al eje de rotación. La fuerza resultante, evidentemen-te, es igual a la suma vectorial de las fuerzas del sistema.

Las ecuaciones que relacionan el movimiento del cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él son las siguientes:

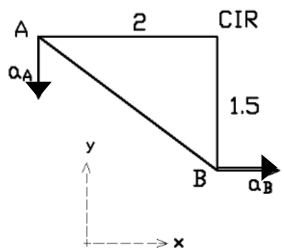
$$\boxed{\sum F_x = m(a_G)_x} \qquad \boxed{\sum F_y = m(a_G)_y} \qquad \boxed{\sum M_G F = \alpha \bar{I}}$$

Resulta oportuno observar que si el segundo miembro de la tercera ecuación es cero, se trata de una traslación pura, si son cero los de las dos primeras ecuaciones, de una rotación pura baricéntrica, y si son ceros los de las tres, el cuerpo se halla en equilibrio. Este estado de equilibrio puede darse, no sólo con el reposo del cuerpo, sino con la traslación pura, si la magnitud y la dirección de la velocidad son constantes; o con la rotación pura baricéntrica, si la velocidad angular es constante; o con un movimiento plano general, si el centro de masa de cuerpo tiene velocidad constante y la velocidad angular también es constante.

Ejemplo. Una barra delgada de 32.2 lb de peso y 2.5 ft de largo, unida a dos collarines de peso despreciable, tiene una velocidad angular de 2 rad/s en sentido antihorario, en la posición mostrada. Sabiendo que las guías de los collarines son lisas, calcule las reacciones de los collarines sobre la barra.



Debemos comenzar estableciendo una relación cinemática entre la aceleración angular de la barra y la aceleración lineal de su centro de masa; primero es necesario relacionar la aceleración angular con la lineal de cualquier punto de la barra.



$$\bar{a}_B = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{B/A} - \omega^2 \bar{r}_{B/A} + \bar{a}_A$$
$$\bar{a}_B \mathbf{i} = \alpha \mathbf{k} \times (2\mathbf{i} - 1.5\mathbf{j}) - 2^2(2\mathbf{i} - 1.5\mathbf{j}) - a_A \mathbf{j}$$
$$\bar{a}_B \mathbf{i} = 1.5\alpha \mathbf{i} + 2\alpha \mathbf{j} - 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - a_A \mathbf{j}$$

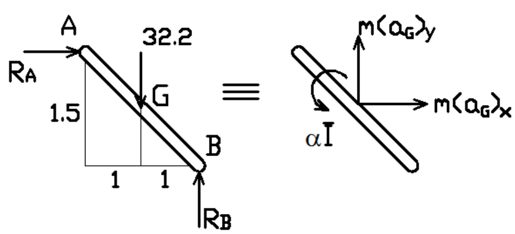
Igualando las componentes verticales

$$0 = 2\alpha - 6 - a_A \, ; \quad a_A = 2\alpha - 6$$

Con esta relación podremos encontrar lo que buscamos

$$\bar{a}_G = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{G/A} - \omega^2 \bar{r}_{G/A} + \bar{a}_A$$
$$\bar{a}_G = \alpha \times (\mathbf{i} - 0.75\mathbf{j}) - 2^2(\mathbf{i} - 0.75\mathbf{j}) - (2\alpha - 6)\mathbf{j}$$
$$\bar{a}_G = 0.75\alpha \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j} - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\alpha \mathbf{j} + 6\mathbf{j}$$
$$\bar{a}_G = (0.75\alpha - 4)\mathbf{i} + (-\alpha + 9)\mathbf{j}$$

Ahora dibujaremos el diagrama de cuerpo libre, un diagrama del sistema resultante, elegiremos un sistema de referencia y resolveremos las ecuacio-nes correspondientes.



$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$
$$R_B - 0.75 R_A = \alpha \left(\frac{1}{12}\right) 2.5^2$$
$$R_B - 0.75 R_A = 0.5208\alpha \ldots (1)$$
$$\sum F_x = m(a_G)_x$$
$$R_A = 0.75\alpha - 4 \ldots (2)$$
$$\sum F_y = m(a_G)_y$$
$$R_B - 32.2 = -\alpha + 9$$
$$R_B = 41.2 - \alpha \ldots (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$41.2 - \alpha - 0.75(0.75\alpha - 4) = 0.5208\alpha$$
$$41.2 - \alpha - 0.5625\alpha + 3 = 0.5208\alpha$$
$$2.083\alpha = 44.2$$

$\boxed{\alpha = 15.46 \ \mathrm{rad/s^2} \circlearrowleft}$ $\boxed{R_A = 15.59 \text{ lb} \rightarrow}$ $\boxed{R_B = 19.74 \text{ lb} \uparrow}$

Además de la ecuación de suma de momentos con respecto al centro de masa, expresada más arriba, los problema de movimiento plano general se pueden resolver mediante la suma de los momentos de las fuerzas del sistema respecto al *centro instantáneo de rotación*, igualándola con la aceleración angular del cuerpo multiplicada por el momento de inercia de la masa respecto al eje de rotación, considerando el movimiento como una rotación pura no baricéntrica. Es decir, en lugar de la ecuación

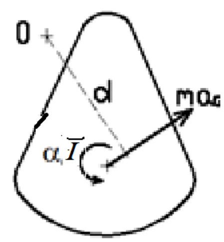
$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

se puede emplear

$$\sum M_{CIR} F = \alpha I_{CIR}$$

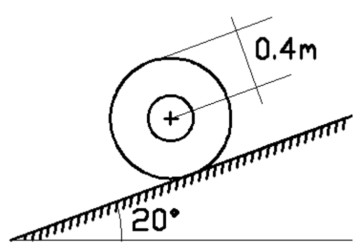
Desde luego, los momentos de las fuerzas pueden calcularse respecto a cualquier punto, teniendo en cuenta que el momento de la fuerza resultante también debe calcularse respecto al mismo punto, sumándole el momento del par. Es decir, se puede utilizar una ecuación tan general como la siguiente:

$$\sum M_0 F = m a_G \bar{d} + \alpha \bar{I}$$



en donde $\bar{d}$ es la distancia entre el punto O y la línea de acción de la fuerza, que pasa por el centro de masa.

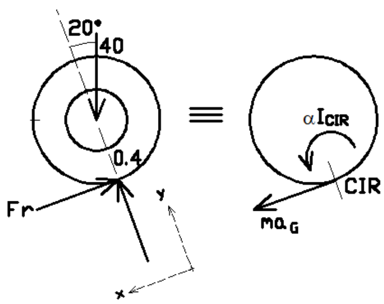
Ejemplo. Una llanta de 40 kg se lanza hacia arriba de un plano inclinado 20° y rueda sin deslizar. Su radio es de 0.4 m y el radio de giro centroidal de su masa, $\bar{k}$ = 0.3 m. Determine la aceleración angular de la llanta, la aceleración lineal de su centro de masa, y diga cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo que se requiere para que no haya deslizamiento entre la llanta y el plano.



Puesto que el cuerpo rueda sin deslizar, la relación cinemática entre la aceleración angular y la aceleración del centro de masa es

$$a_G = \alpha r = 0.4\alpha \swarrow 20°$$

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la rueda y un diagrama del sistema resultante de las fuerzas, y elegimos un sistema de referencia. Comenzaremos aplicando la ecuación de momentos respecto al punto de contacto entre la rueda y el plano; consideraremos positivos los momentos en sentido antihorario.



$$\sum M_{CIR}F = \alpha I_{C/R}$$

$$40(0.4)\text{sen } 20° = \alpha\left(0.3^2\,\frac{40}{g} + 0.4^2\,\frac{40}{g}\right)$$

$$0.4\text{sen } 20° = \frac{0.25}{g}\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 5.37 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft}$$

$$\boxed{a_G = 2.23 \text{ m/s}^2 \swarrow 20°}$$

Para terminar, calcularemos las magnitudes de la componente normal de la reacción del plano y la fuerza de fricción; supondremos que ésta es máxima, para determinar el coeficiente de fricción estática mínimo.

$$\sum F_y = m(a_G)_y = 0$$

$$N - 40\cos 20° = 0 \ ; \quad N = 37.59$$

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

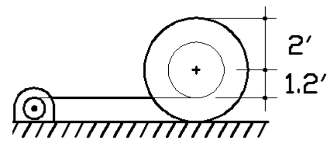
$$40sen\ 20° - Fr = \frac{40}{9.81}(2.22)$$

$$Fr = 40sen\ 20° - \frac{40}{9.81}(2.23) = 4.925$$

$$\mu = \frac{Fr}{N} = \frac{4.925}{37.59}$$

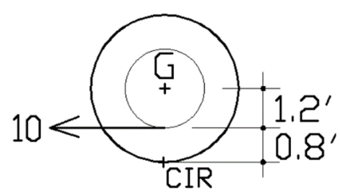
$$\boxed{\mu = 0.131}$$

Ejemplo. El motor de la figura produce una aceleración constante de 10 ft/s^2 a la cuerda enrollada en el carrete. El radio exterior del carrete es de 2 ft y el interior de 1.2 ft; su radio de giro centroidal es de 1.8 ft y su peso, de 64.4 lb. Sabiendo que los coeficientes de fricción estática y cinética entre el carrete y la superficie horizontal son 0.2 y 0.1, respectivamente, calcule la tensión de la cuerda y la aceleración angular del carrete.



No sabemos, sin embargo, si el carrete se deslizará o no sobre la superficie horizontal, ni qué sentido tendrá su aceleración angular.

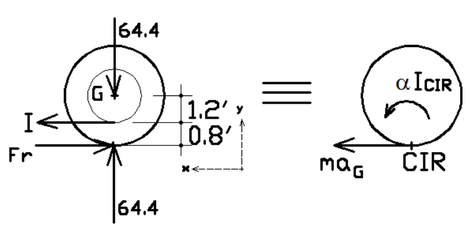
Abordaremos el problema suponiendo que el carrete rueda sin deslizar rodando hacia la izquierda; de modo que su aceleración angular y la aceleración del centro de masa serían



$$\alpha = \frac{10}{0.8} = 12.5 \circlearrowleft$$

$$a_G = \alpha r = 12.5(2) = 25 \leftarrow$$

Ahora dibujaremos el diagrama de cuerpo libre y el diagrama del sistema resultante. La primera ecuación será la de momentos con respecto al supuesto *centro instantáneo de rotación*.



$$\sum M_{CIR}F = \alpha I_{CIR}$$

$$0.8T = \alpha[1.8^2(2) + 2^2(2)]$$

$$T = 18.1\alpha = 18.1(12.5) = 226.25$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$226.25 - F_r = 2(25)$$

$$F_r = 226.25 - 50 = 176.25$$

Queda pendiente comprobar si, efectivamente, el carrete no se desliza sobre la superficie. Para ello calcularemos la fuerza de fricción necesaria y la compararemos con la de fricción estática máxima.

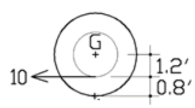
$$F' = \mu_0 N = 0.2(64.4) = 12.88$$

$$F_r >> F'$$

Como la fuerza necesaria para evitar el deslizamiento es mucho mayor que la fuerza de fricción estática máxima, significa que el carrete se desliza y la fuerza de fricción es la cinética:

$$F_r = 0.1N = 6.44$$

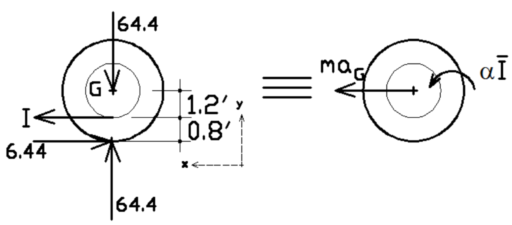
Ahora necesitamos establecer otra relación cinemática entre la aceleración conocida —la del punto de contacto de la cuerda con el núcleo del carrete— con la del centro de masa.



$$\bar{a}_G = \bar{a}_{G/P} + \bar{a}_p$$

$$a_G = 1.2\alpha + 10$$

Volvemos a dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicamos la ecuación de momentos con respecto al centro de masa y de la suma de fuerzas horizontales.



$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$6.44(2) - 1.2T = \alpha(1.8^2)2$$

$$1.2T = 12.88 - 1.8^2(2)\alpha$$

$$T = 10.733 - 5.4\alpha \ldots (1)$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$T - 6.44 = 2(1.2\alpha + 10)$$

$$T = 6.44 + 2.4\alpha + 20$$

$$T = 26.44 + 2.4\alpha \ldots (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$26.44 + 2.4\alpha = 10.733 - 5.4\alpha$$

$$7.8\alpha = -15.707$$

$$\alpha = -2.014$$

$$\boxed{\alpha = 2.01 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft} \qquad \boxed{T = 21.6 \text{ lb}}$$

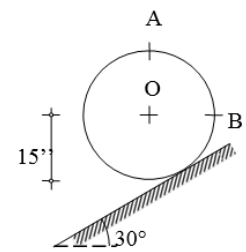
Se puede deducir que la aceleración del centro de masa es de 7.58 ft/s^2 y se dirige hacia la izquierda.

Serie de ejercicios de Dinámica

MOVIMIENTO PLANO GENERAL

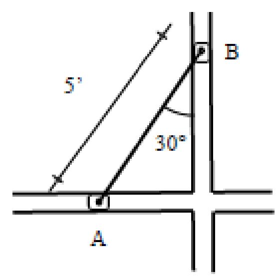
1. El disco de la figura rueda sin deslizar hacia abajo del plano inclinado con una rapidez angular de 40 rpm. a) ¿Cuál es la velocidad de su centro de figura *O*? b) ¿Cuál, la relativa de *A* respecto a *B*?

(*Sol.* 62.8 in/s ↙ 30°; 88.9 in/s ↙ 45°)



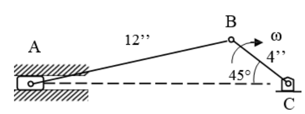
2. Los extremos de la barra *AB* están articulados con correderas que se mueven a lo largo de guías perpendiculares. Si, en el instante mostrado, *A* se mueve hacia la izquierda a 10 ft/s, diga con qué rapidez desciende el extremo *B* y cuál es la velocidad angular de la barra.

(*Sol.* 5.77 ft/s ↓ ; 2.31 rad/s ↻)



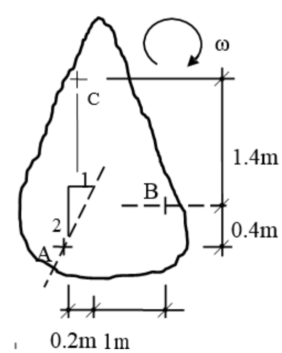
3. La manivela *BC*, que trabaja a 300 rpm, transmite su movimiento al émbolo *A* por medio de la biela *AB*. Para el instante representado en la figura, calcule la velocidad angular de la biela y la rapidez lineal del émbolo.

(*Sol.* 72.8 rpm ↺; 110.4 in/s →)

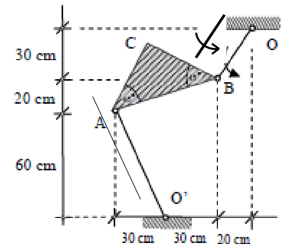


4. Se conocen las direcciones de las velocidades lineales de los puntos *A* y *B* del menhir de la figura, animado de movimiento plano general. Se sabe que, en el mismo instante, su rapidez angular es de 10 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Diga cuál es la velocidad lineal del punto *C*.

(*Sol.* 26.0 m/s ↗ 22.6º)

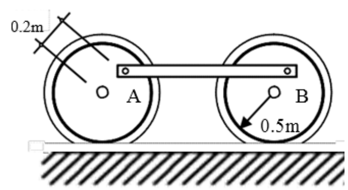


5. Calcule la velocidad lineal del vértice C de la placa triangular de mecanismo que se muestra en la figura, sabiendo que la rapidez angular de la barra OB es de 5 rad/s en el sentido indicado
. (*Sol.* 2 m/s →)



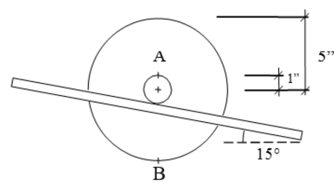
6. La figura representa esquemáticamente las ruedas de una locomotora de vapor y su biela de acoplamiento. Dicha locomotora se mueve hacia la derecha aumentando su rapidez a razón de 2.5 m/s^2. Cuando su rapidez sea de 12 m/s, ¿cuáles serán la velocidad y aceleración angúlares de las ruedas?

(*Sol.* 229 rpm ↻; 5 rad/s^2 ↻)



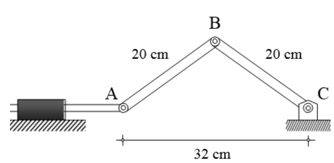
7. El rotor de la figura rueda sin deslizar sobre los rieles inclinados. Su centro de figura baja de nivel a razón de 90 in/s^2. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración lineales de los puntos A y B un segundo después de haber comenzado el movimiento, que es el instante representado en la figura.

(*Sol.* v_A = 690 in/s; v_B = 1405 in/s; a_A = 1.210 x 10^5 in/s^2; a_B = 6.04 x 10^5 in/s^2)



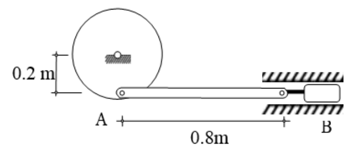
8. La articulación A se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 18 cm/s. Para el instante representado en la figura, diga cuáles son las aceleraciones angulares de la biela AB y de la manivela BC.

(*Sol.* α_{AB}= 0.75 rad/s^2 ↻ ;
α_{BC}= 0.75 rad/s^2 ↺)



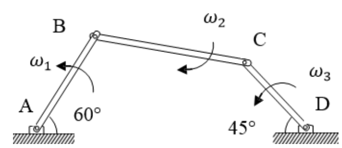
9. ¿Cuál es la aceleración lineal del émbolo *B* en el instante mostrado? El disco tiene una rapidez angular de 5 rad/s en sentido antihorario y una aceleración angular de 10 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj.

(*Sol.* 2 m/s^2 →)



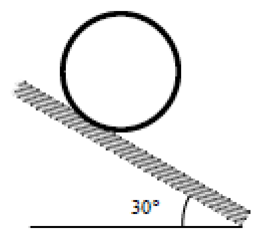
10. Las longitudes de las barras del mecanismo de cuatro articulaciones que se muestra en la figura son *AB* = 4 m, *BC* = 6 m y *CD* = 3 m. Determine la magnitud de la aceleración de la articulación *C*, sabiendo que la barra *AB* tiene una rapidez angular constante ω_1 = 10 rad/s.

(*Sol.* 4960 m/s^2)



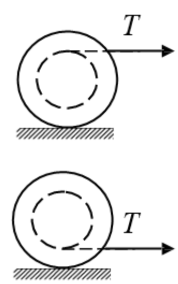
11. Un tubo cilíndrico de 40 kg rueda sin deslizar hacia abajo de un plano inclinado 30º. Determine la aceleración angular del tubo, si su radio es de 0.2 m. Diga también cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo μ necesario para que, efectivamente, no haya deslizamiento.

(*Sol.* 12.26 rad/s^2 ↻ ; 0.289)



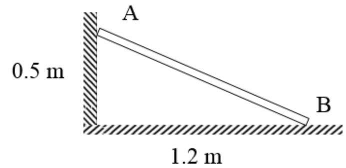
12. Los carretes mostrados pesan 19.62 kg y tienen un radio de giro de 0.15 m respecto a su eje geométrico. Las tensiones de las cuerdas son de 10 kg. La fricción es suficiente para que no haya deslizamiento. Determine la aceleración angular de cada carrete y las aceleraciones lineales de sus centros de masa, si los diámetros exteriores son de 0.3 m y los interiores de 0.15 m.

(*Sol.* 25 rad/s^2 ↻; 3.75 m/s^2 →;
8.33 rad/s^2 ↻; 1.250 m/s^2 →)



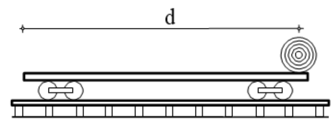
13. Si la barra se abandona del reposo en la posición mostrada, ¿cuáles serán las magnitudes de las reacciones *A* y *B* en ese instante? La barra pesa 100 kg y el coeficiente de fricción cinética es 0.2 entre todas las superficies.

(*Sol.* R_A = 30.6 kg; R_B = 43.1 kg)



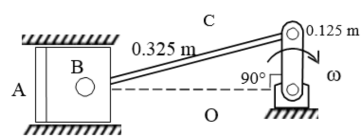
14. El carro plataforma lleva un tronco de árbol que puede considerarse un cilindro macizo y está originalmente en reposo. Se mueve hacia la derecha con una aceleración constante *a*. Encuentre la distancia *s* que se desplaza antes de que el tronco caiga por el extremo izquierdo. La fricción es suficiente para que no haya deslizamiento.

(*Sol.* $s = 3d/2$)



15. Calcule las componentes horizontal y vertical de la reacción del perno B sobre el émbolo *A* en la posición mostrada. La manivela *OC* gira con rapidez angular constante *ω* de 1200 rpm. La biela *BC*, que puede considerarse una barra uniforme, pesa 0.9 kg y el émbolo, 0.8 kg. La fricción entre el cilindro y el émbolo es despreciable.

(*Sol.* 67.1 kg ← ; 8.71 kg ↓)



16. Si el cilindro *A* rueda sin deslizar sobre el plano inclinado, ¿cuáles serán las aceleraciones angulares de *A* y de *B*, la aceleración lineal de *C* y la tensión en cada uno de los tramos de la cuerda? Considere homogéneos todos los cuerpos del sistema.

(*Sol.* $\alpha_A = 33.1$ rad/s^2 ↻;
$\alpha_B = 88.2$ rad/s^2 ↻; $a_C = 6.61$ m/s^2 ↓;
T_{AB} = 18.75 kg; T_{BC} = 32.1 kg)